フーリエ級数 (周期 $2L$)

山本昌志*

2006 年 11 月 7 日

概 要

周期 $2L$ の任意の関数のフーリエ級数を学習する．また，偶関数と奇関数の性質を復習し，フーリエ余弦級数と正弦級数を学ぶ．

1 本日の学習内容

本日の内容は，教科書 [1] の p.225–227 ページである．ここでは，周期 $2L$ の任意の関数 $f(x)$ を三角関数で展開することを学習する．また，関数 $f(x)$ に，偶関数や奇関数といった対称性がある場合のフーリエ級数を学習する．

本日の学習の目標は，つぎのとおりである．

- 周期 2π のフーリエ級数を周期 $2L$ へ拡張する方法が分かる．
- 偶関数と奇関数の性質が分かる．
- フーリエ余弦級数と正弦級数が分かる．

2 周期 $2L$ の周期関数のフーリエ級数

前回，周期 2π のフーリエ級数を学習した．ここでは，さらに一般化し，任意の周期 $2L$ の場合のフーリエ級数を求める．せっかくなので，前回の周期 2π のフーリエ級数を利用することにする．周期 2π の関数 $f(x)$ は，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (1)\\
&\text{ただし，}\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

とフーリエ級数で表せる．これを，任意の周期 $2L$ に拡張する．

図 1 のような周期 $2L$ の関数 $g(x)$ を考える．この関数の横軸を π/L 倍すると，図 2 のような周期 2π の関数 $f(x)$ ができあがる．したがって，この $f(x)$ は式 (1) のようにフーリェ級数で表すことができる．

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

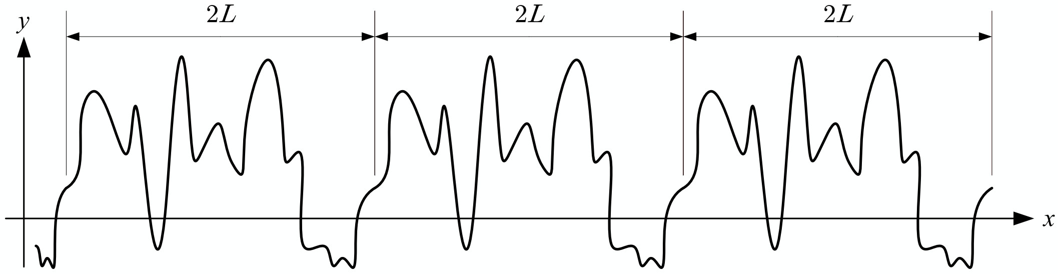

図 1: $2L$ を周期とする関数 $g(x)$

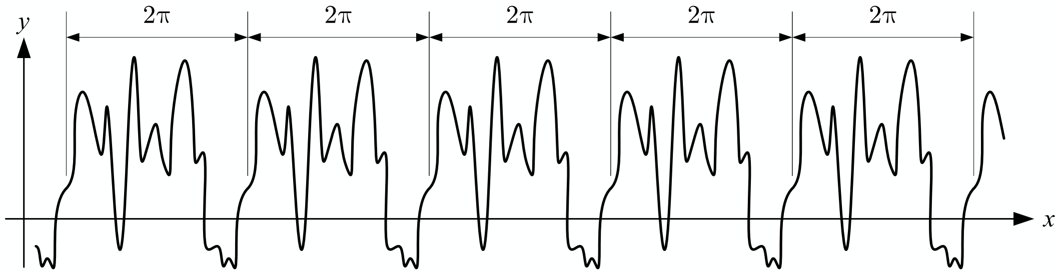

図 2: 周期 $2L$ の関数 $g(x)$ の x 軸を圧縮して作成した 2π を周期とする関数 $f(x)$

ところで，関数の横軸を π/L 倍するということはどういうことであろうか?．図からも分かるように，次の関係

$$f(x) = g\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \tag{2}$$

が成り立つことに他ならない．直感的に理解できない—というならば，$x = 2\pi$ としてみよ．$f(2\pi) = g(2L)$ となることが分かる．

ここで，$f(x)$ は 2π の周期関数なので，式 (1) のようにフーリエ級数で表すことができる．一方で，関数 g と f は式 (2) の関係がある．ゆえに，

$$g\left(\frac{Lx}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \tag{3}$$

$$\text{ただし，} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

となる．ここで，$X = Lx/\pi$ と変数変換する．すると，

$$g(X) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi X}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi X}{L} + a_3 \cos\frac{3\pi X}{L} + \cdots + b_1 \sin\frac{\pi X}{L} + b_2 \sin\frac{2\pi X}{L} + b_3 \sin\frac{3\pi X}{L} + \cdots \tag{4}$$

$$\text{ただし，}\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g\,(X) \cos\frac{n\pi X}{L}\,\mathrm{d}X \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g\,(X) \sin\frac{n\pi X}{L}\,\mathrm{d}X$$

が得られる．これを，形式的に $X \Rightarrow x$ と置き換えてもよい．すると，

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + a_3 \cos\frac{3\pi x}{L} + \cdots + b_1 \sin\frac{\pi x}{L} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + b_3 \sin\frac{3\pi x}{L} + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\text{ただし，}\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g\,(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g\,(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

となる．これが，任意の周期 $2L$ をもつ関数のフーリエ級数である．

3 フーリエ余弦級数とフーリエ正弦級数

3.1 偶関数と奇関数

関数の対称性を考えると，フーリエ係数を求める積分が容易になることがある．ここでは，関数の対称性として，偶関数と奇関数を考える．

$f(-x) = f(x)$ ならば偶関数 (even function)，$f(-x) = -f(x)$ ならば奇関数 (odd function) であるという．図 3 や 4 に示すように，偶関数は y 軸について対称，奇関数は原点について対称になる．諸君が知っている関数では，次のようなものがある．

偶関数の例

$\cdots,\ x^{-4},\ x^{-2},\ 1,\ x^2,\ x^4,\ \cdots \qquad \cos x \quad \cosh x \qquad \cdots,\ f(x^{-2}),\ f(x^2),\ f(x^4),\ \cdots$

奇関数の例

$\cdots,\ x^{-3},\ x^{-1},\ x,\ x^3,\ \cdots \qquad \sin x \quad \tan x \quad \arcsin x \quad \arctan x \quad \sinh x \quad \tanh x$

どちらでもない

$\arccos x \quad e^x \quad \log x$

偶関数，奇関数の名前の由来???．x^n の関数を考えれれば，偶関数および奇関数のそれが理解できる．n が偶数の時偶関数，奇数のとき奇関数になる．そうして，

- x^2 の場合，$n = 2$ は偶数; 偶関数となる．$f(-x) = f(x)$ の関係があり y 軸に対称である．
- x^3 の場合，$n = 3$ は奇数; 奇関数となる．$f(-x) = -f(x)$ の関係があり原点に対称である．

ということが分かる．

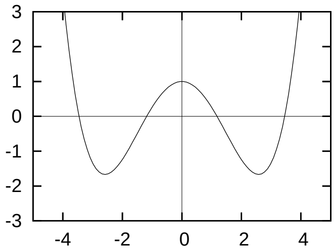

図 3: 偶関数

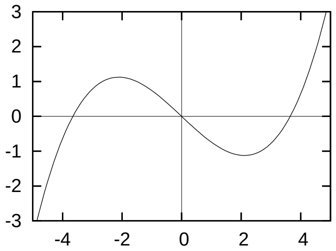

図 4: 奇関数

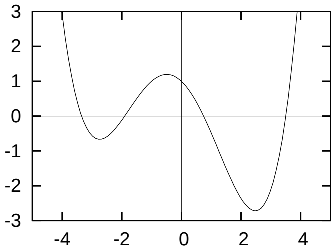

図 5: どちらでもない

関数同志の演算に関して，次のような関係がある．偶関数であれば $f(-x) = f(x)$，奇関数であれば $f(-x) = -f(x)$ から，これは容易に理解できる．

偶 + 偶 ⇒ 偶	偶 − 偶 ⇒ 偶	偶 × 偶 ⇒ 偶	偶/偶 ⇒ 偶
奇 + 奇 ⇒ 奇	奇 − 奇 ⇒ 奇	奇 × 奇 ⇒ 偶	奇/奇 ⇒ 偶
偶 + 奇 ⇒ どちらでもない	偶 − 奇 ⇒ どちらでもない	偶 × 奇 ⇒ 奇	偶/奇 ⇒ 奇

さらに，対称性より次の積分の関係も得られる．積分は x 軸との面積になる—ということから，これも容易に分かる．

$$\int_{-a}^{a} \text{偶関数}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} \text{偶関数}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-a}^{a} \text{奇関数}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{6}$$

3.2 偶関数と奇関数のフーリエ級数

偶関数あるいは奇関数の周期関数は，しばしば出会う．このような場合，フーリエ級数は少しだけ簡単になる．

周期 $2L$ の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は式 (5) から計算することができる．ここで，$f(x)$ が偶関数あるいは奇関数の場合を考える．フーリエ係数 a_n と b_n は，つぎの積分より求めることができる．

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

もし，$f(x)$ が偶関数であれば，

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad b_n = 0 \tag{8}$$

となる．なぜならば，被積分関数 $f(x)\cos(n\pi x/L)$ は偶関数，$f(x)\sin(n\pi x/L)$ は奇関数となり，y 軸に対して対称と反対称になるからである．一方，$f(x)$ が奇関数であれば，

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

となる．これらをまとめると，次の結果が得られる．

フーリエ余弦級数と正弦級数

- 周期関数が偶関数の場合

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{10}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

これをフーリエ余弦級数と呼ぶ.

- 周期関数が奇関数の場合

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{11}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

これをフーリエ正弦級数と呼ぶ.

ここで，ちょっと余談であるが，面白いことを述べよう．対称性の無い関数 $f(x)$ は，式 (5) のようにフーリエ級数で表すことができる．この式の右辺は，偶関数であるフーリエ余弦級数と奇関数であるフーリエ正弦級数の和になっている．このことは，対称性のない周期関数であろうとも，偶関数と奇関数に分解できることを示している．すなわち，

$$\text{任意の周期関数} = \text{偶関数の周期関数} + \text{奇関数の周期関数} \tag{12}$$

である．

4　課題

4.1　レポート提出要領

期限	11 月 14 日 (火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ)
用紙	A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電気数学」 課題名「課題　フーリエ級数 (周期 $2L$)」 提出日 3E　学籍番号　氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

4.2　課題内容

以下の問題では，計算過程は省略しないで全て書くこと．

[**問 1**]　教科書 [1] の p.226 の例題 3

[**問 2**]　教科書 [1] の p.237 の演習問題 IV-I[A] の 1

4.3　小テスト

次回の授業のはじめに小テストを行う．以下の問題が 10 分以内に書けるように練習すること．

- 教科書 [1] の p.226 の例題 3

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.