# フーリエ級数(周期2$\pi$)

山本昌志*

2006 年 10 月 30 日

**概 要**

周期 $2\pi$ の任意の関数を $\cos x$ や $\sin x$ の和で表すフーリエ級数を学習する．ここでは，(1) 周期関数の意味，(2) フーリエ係数の計算方法，(3) 部分和の収束の様子を示す．

## 1 本日の学習内容

本日の内容は，教科書 [1] の p.222–225 ページである．ここでは，周期 $2\pi$ の任意の関数 $f(x)$ を $\sin x$ と $\cos x$ で展開することを学習する．任意の周期関数は，三角関数の和で表すことができ，これをフーリエ級数[1]と言う．

本日の学習の目標は，つぎのとおりである．

- 周期関数の意味が分かる．
- フーリエ係数の計算方法が分かる．
- 矩形波や三角波，のこぎり波のフーリエ係数を求めることができる．

## 2 フーリェ級数

### 2.1 三角関数を用いた展開

前々回の講義で，任意の関数を冪級数で展開 (テイラー展開) した．ここでは，もっとけったいなことを考えて三角関数で展開してみよう．すなわち，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \end{aligned} \tag{1}$$

と展開する．最初の項は $\cos 0x = 1$ のため定数となり，$a_0/2$ がその係数である．なんで，2 で割るの???—というツッコミもあるだろう．$a_0$ としておいても良いが，あとで $a_0/2$ とした方が便利なことがある．今は分からないで良いが，取り合えずこういうものだと思って，悩まないで欲しい．

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

[1] Jean Baptiste Joseph Fourier(1768–1830) が熱の問題を解くときに考えた．

この展開式を見て諸君は，展開の係数 $a_n$ と $b_n$ をもとめることに興味があるだろう．それをぐっと我慢して，まず関数 $f(x)$ の右辺の性質を考えることにしよう．関数 $f(x)$ は，$2\pi$ の周期性という重要な性質がある．定数項である $a_0/2$ は，$x \to x+2\pi$ としても値は変わらいない．三角関数の項も，$x \to x+2\pi$ としても値は変わらない．なぜならば，

$$\begin{aligned} &\cos x = \cos(x+2\pi) &\quad& \cos 2x = \cos 2(x+2\pi) &\quad& \cos 3x = \cos 3(x+2\pi) &\quad& \cdots \\ &\sin x = \sin(x+2\pi) && \sin 2x = \sin 2(x+2\pi) && \sin 3x = \sin 3(x+2\pi) && \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

となるからである．すなわち式 (1) は，

$$f(x) = f(x+2\pi) \tag{3}$$

となっている．式 (1) のどんな $x$ であろうとも，この関係は成り立つ．いかなる $x$ に $2\pi$ を加えても関数の値はいつも同じ—ということをしめしている．これを繰り返すと，どんな $x$ に対しても

$$\cdots = f(x-4\pi) = f(x-2\pi) = f(x) = f(x+2\pi) = f(x+4\pi) = \cdots \tag{4}$$

が得られる．明らかに $2\pi$ の周期性がある．これって，どういう意味?—と考える者もいるだろう．これって，図 1 のような意味である．関数が $2\pi$ で繰り返していることを示している．これが $2\pi$ の周期性の意味である．

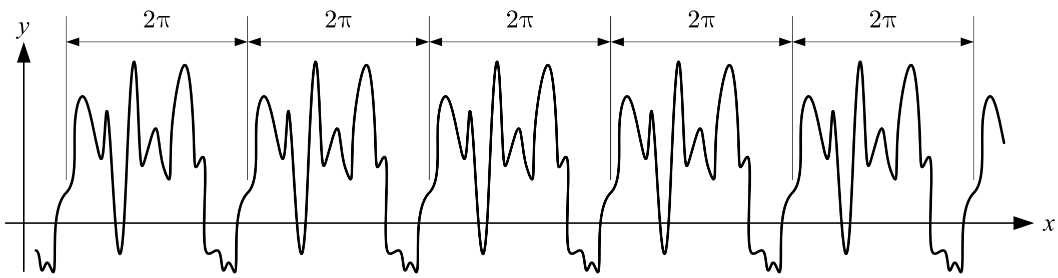


図 1: $2\pi$ を周期とする関数

式 (1) の $f(x)$ は，$2\pi$ を周期とした任意の関数である．任意の周期関数は，三角関数の和で表すことができる—と言っている．このように周期関数を三角関数の和で表すことを，**フーリェ級数**[2](Fourier series) と言う．別の考え方をすると，区間の幅が $2\pi$，例えば $[-\pi, \pi]$ のどんな関数でも三角関数の和で表すことができると式 (1) は言っている．テイラー展開は任意の関数を冪乗の和で表したが，フーリェ級数は三角関数の和で表す．

フーリェ級数の何がうれしいの?—とツッコミを入れるひともいるだろう．世の中のどんな周期関数でも三角関数の和で表すことができる—ということ自体，驚くべきことで，非常に興味深い．実用的な面—工学—を考えると「どんな周期関数でも三角関数を使って計算できる」ということは便利この上ない．諸君がよく知っている三角関数の知識で，図 1 のようなけったいな関数の解析ができるのである．後で述べる

[2] Jean Baptiste Joseph Fourier(1768–1830) が，熱の問題を解くときに考えた．

ことになるが，不連続な関数も取り扱うことができる．そのため，フーリェ解析は工学の諸問題のいたるところで，出現する．交流回路の理論の底には，フーリェ解析があり，諸君は知らないうちにそれを使っている．電気回路[3]に限らずフーリェ解析は線形微分方程式を解くための極めて強力な武器なので，物理学や工学において光や音，振動の問題にひろく利用されている．近年では，コンピュータグラフィックスなど分野でもお目にかかる．諸君もフーリェ解析という強力な武器を手に入れよう．

## 2.2　フーリエ係数

任意の周期関数をフーリェ級数を使って解析するためには，式 (1) の三角関数の係数—**フーリェ係数**—$a_n$ や $b_n$ を計算する必要がある．さあ，どうするか?.

- $n$ が有限個の場合，連立方程式から計算できる[4]．しかし，式 (1) では $n$ は無限であるため，連立方程式はダメだ．
- テイラー展開のように微分をするか; これもダメである．高次の項が都合良く，ゼロにならない．

今までの方法は無理である．先人たちは，教科書 [1]p.222 の (2) 式の積分を使ってフーリェ係数を求めた．

### 2.2.1　準備

フーリェ係数を計算する前に，それに必要な積分を示しておく．$m$ と $n$ を自然数として，コサインの積を計算する．

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right)\left(\frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(n+m)x}+e^{-i(n+m)x}+e^{i(n-m)x}+e^{-i(n-m)x}}{4} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x\right] \mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}+x\right]_{\pi}^{-\pi} & (n=m) \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}+\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{\pi}^{-\pi} & (n\neq m) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi & (n=m) \\ 0 & (n\neq m) \end{cases}
\end{aligned} \tag{5}$$

同じことをサインの積に対して行うと，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & (n=m) \\ 0 & (n\neq m) \end{cases} \tag{6}$$

[3]これは線形微分方程式

[4]事実，コンピューターで，有限個のフーリェ級数を計算する場合，連立方程式を計算している．Fast Fourier Transform(FFT) や Discrete Fourier Transform(DFT) と呼ばれる方法である

が得られる．残りは，サインとコサインの積である．これは簡単で，$\sin nx$ は奇関数，$\cos mx$ は偶関数である．その積は奇関数となる．したがって，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, \mathrm{d}x = 0 \tag{7}$$

となる．もうひとつ，次の積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x = 0 \tag{8}$$

も使う．これで，フーリエ係数を計算する準備ができた．

### 2.2.2 $a_0$ の計算

$a_0$ を計算するためには，式 (1) を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分を行う．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x \right\}$$

式 (8) を使うと

$$= a_0 \pi \tag{9}$$

これより，

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x \tag{10}$$

を計算することにより，$a_0$ を求めることができる．これで，係数のひとつが求まった．

この式をよく見ると，$a_0/2$ は $f(x)$ の平均値となっている．電気回路では，この平均値のことを直流成分と言う．

### 2.2.3 $a_n$ と $b_n$ 計算

式 (1) の両辺に $\cos mx$ を乗じて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分を行う— ことにより，コサインの係数の $a_n$ を求める．ただし，$m$ は自然数とする．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, \mathrm{d}x \right\}$$

式 (8) と (5)，(7) を使うと

$$= a_m \pi \tag{11}$$

これより，

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, \mathrm{d}x \tag{12}$$

を計算することにより，$a_m$ を求めることができる．ここで，$m=0$ の場合を考える．そうすると，式 (10) と同一の式が得られる．したがって，式 (10) は式 (12) に吸収され，不要となる．これが，フーリエ級数の最初の項を $a_0$ としないで，$a_0/2$ とした理由である．

つぎに，$b_n$ を求めるために，式 (1) の両辺に $\sin mx$ を乗じて区間 $[-\pi,\pi]$ で積分を行う．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x\right\}$$

式 (8) と (7)，(6) を使うと

$$= b_m\pi \tag{13}$$

これより，

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

を計算することにより，$b_m$ を求めることができる．

### 2.3 収束について

式 (1) の両辺が等号で結ばれるためには，$n\to\infty$ の時左辺が $f(x)$ に収束することを証明しなくてはならない．教科書 [1] の p.311–315 ページにその証明が載っている．この講義に時間的な余裕があれば，後で証明する．興味のある者は，自分で勉強せよ．

## 3 フーリェ級数の例

フーリエ級数の係数を求める方法が分かった．本当に，任意の周期関数を三角関数の和になっているかを，p.224 の例題 1 と例題 2 を使って確かめる．

### 3.1 矩形波

これまでの結果を利用して，図 2 のような矩形波をフーリエ級数で表す．これは，教科書の p.224 の例題 1 である．

$a_n$ や $b_n$ を求める積分の範囲は，$[-\pi,\pi]$ である．しかし，図 2 の関数は，$x=0$ で不連続になっている．そのため，$[-\pi,0]$ と $[0,\pi]$ に分けて，積分を実施する．そうすると，

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \tag{15}$$

が得られる．積分は，教科書を見て自分でも計算すること．

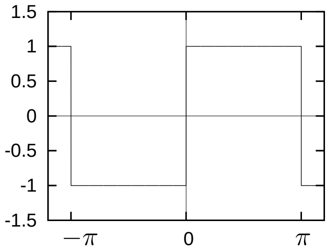

図 2: 周期 $2\pi$ の矩形波

この式の右辺は，本当に図 2 のような矩形波になっているのだろうか?．コンピューターを使って計算してみる．ここで，フーリエ級数の部分和 $S_n$ を

$$S_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \tag{16}$$

とする．ちゃんとしたフーリエ級数であれば，$n \to \infty$ とすべきであるが，コンピューターでは無限大は無理なので，有限の $n$ まで計算する．計算結果を図 3 から図 8 に示す．$n$ が大きくなると，矩形波に近づく．この例で示すように，たとえ不連続な関数であっても三角関数で展開できる．図 9 を見て分かるように，部分和もきれいな $2\pi$ の周期関数になっている．

ここでの計算結果は，驚くべきことである．図 2 のような不連続な関数は，式 (15) のように三角関数を使って取り扱うことができる— という事実[5]を表している．このような不連続な関数は，電気回路ではしばしば現れる．デジタル回路のパルスは，矩形波である．今，諸君はパルスを解析する手段を得たことになる．電気回路でおなじみの交流—サイン波— の解析手法を用いて，パルスが解析できる!!!.

[5]項別微分とか項別積分とかややこしい話もあるが，無視する．

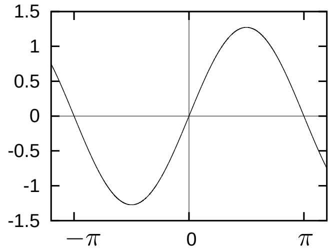


図 3: 方形波:$S_1$

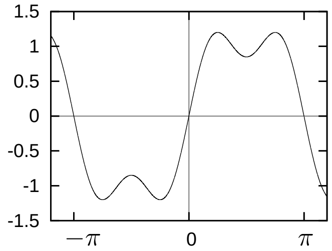


図 4: 方形波:$S_2$

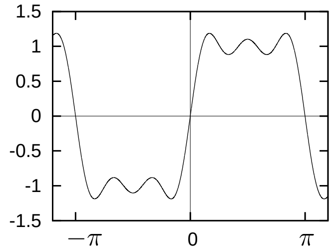


図 5: 方形波:$S_3$

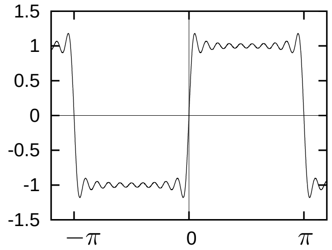


図 6: 方形波:$S_{10}$

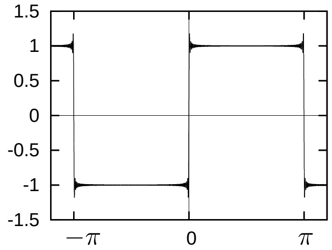


図 7: 方形波:$S_{100}$

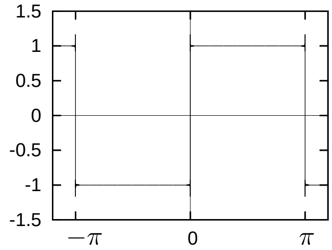


図 8: 方形波:$S_{10000}$

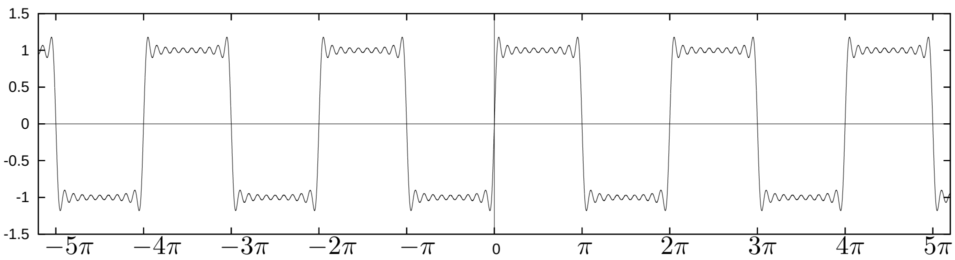


図 9: x 軸を拡大した $S_{10}$ のフーリエ級数.

## 3.2 三角波

つぎに，図 10 のような三角波 (教科書の p.224–225 の例題 2) をフーリエ級数で表す．これも，$[-\pi, \pi]$ の範囲で，積分を行い $a_n$ と $b_n$ を求める．先ほど同様，$x = 0$ で不連続な関数なので，積分は $[-\pi, 0]$ と $[0, \pi]$ の 2 つの部分に分ける．そして，教科書に示しているように部分積分を使うと，

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \tag{17}$$

が得られる．

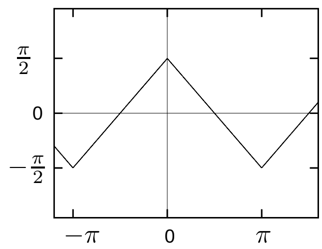


図 10: 周期 $2\pi$ の三角波

式 (17) の部分和を図 11 から 16 に示す．矩形波より収束が早いことが分かるだろう．これまでの 2 つの結果から，フーリエ級数は正しそうである—ということが感覚的理解できるであろう．本当は，自分でプログラムを書いてみることが重要であろう．プログラムの得意な者はトライせよ．

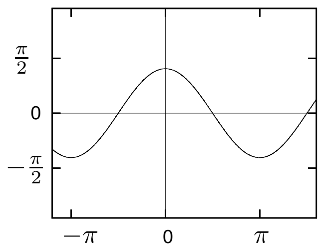

図 11: 三角波:$S_1$

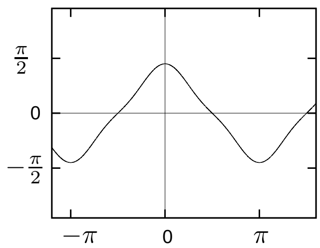

図 12: 三角波:$S_2$

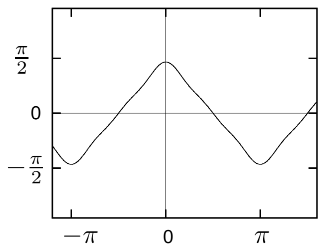

図 13: 三角波:$S_3$

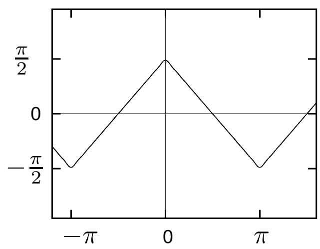

図 14: 三角波:$S_{10}$

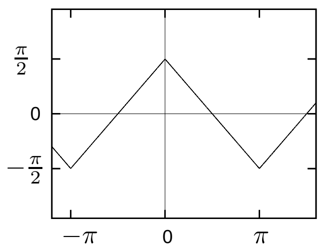

図 15: 三角波:$S_{100}$

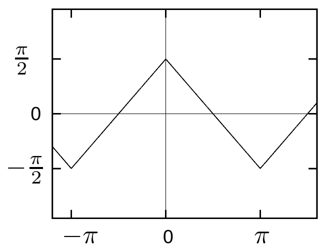

図 16: 三角波:$S_{10000}$

# 4　課題

## 4.1　レポート提出要領

| | |
|---|---|
| 期限 | 10 月 7 日 (火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ) |
| 用紙 | A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと． |
| 提出場所 | 山本研究室の入口のポスト |
| 表紙 | 表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること．<br>授業科目名「電気数学」<br>課題名「課題　フーリエ級数 (周期 $2\pi$)」<br>提出日<br>3E　学籍番号　氏名 |
| 内容 | 2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること． |

## 4.2　課題内容

以下の問題では，計算過程は省略しないで全て書くこと．

**[問 1]** フーリエ係数 $a_n$ と $b_n$ の計算式を示せ．

**[問 2]** 図 2 のフーリエ級数を示せ．

**[問 3]** 図 10 のフーリエ級数を示せ．

**[問 4]** 図 17 のフーリエ級数を示せ．

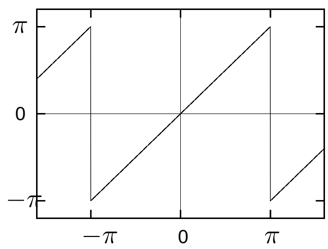


図 17: 周期 $2\pi$ ののこぎり波

## 4.3　小テスト

次回の授業のはじめに小テストを行う．以下の問題が 10 分以内に書けるように練習すること．

- 矩形波，三角波，あるいはのこぎり波のフーリエ級数を求める．これら，3 つのうちひとつを小テストで出題する．積分の計算は，省かないでできるだけ詳しく，書くこと．

# 参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.